第27卷 第3期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 3
2010年06月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS June 2010

文章编号:1005-3085(2010)03-0479-08

非线性微分动力系统稳定域计算的波形松弛方法*

蔺小林

(西安交通大学理学院，西安 710049)

摘 要: 非线性微分动力系统稳定域计算是在许多领域具有实际应用的问题。本文对非线性微分动力系统稳定域的计算方法进行了总结，通过对稳定域边界流形的全面分析，提出了用波形松弛方法计算稳定域边界流形的思想，给出了计算稳定域边界流形的波形松弛算法。第一步，找出微分动力系统的所有平衡点，确定渐近稳定平衡点稳定域边界上的平衡点；第二步，用微分动力系统的反方向系统确定原系统渐近稳定平衡点稳定域边界上平衡点的稳定流形；第三步，渐近稳定平衡点稳定域的边界是由边界上平衡点和该平衡点稳定流形的并集构成。最后用例子来说明波形松弛方法在计算稳定域边界流形的有效性。

关键词: 非线性微分动力系统；稳定域；波形松弛方法

分类号: **AMS**(2000) 65L07 **中图分类号**: O175.14 **文献标识码**: A

1 引言

非线性微分动力系统平衡点的稳定域(或称为吸引域)在诸如电力系统，经济系统，生物系统等方面都有非常重要的应用。从应用的观点来看希望得到最大的稳定域，这样在电力系统的设计[1]及相关参数的选取中可以节省由于不必要的过保护设计而产生的浪费。同样在经济系统、化学反应器、生物系统[2]等方面可以节省大量的人力物力，实现最大的经济效益。确定稳定域的方法有Lyapunov函数方法、拓扑动力系统方法和其它数值方法等，此方面比较早的综述文章有Genesio, Tartaglia, Vicino[3]和Varaiya, Wu, Chen[4]，他们总结了二十世纪八十年代以前稳定域的研究工作，给出了计算稳定域的方法和所取得的成果，同时基于轨线的拓扑结构提出了“轨线逆转”方法。Lyapunov函数方法就是通过对所研究的微分系统构造相应的Lyapunov函数，应用稳定性方面的结论得到系统渐近稳定平衡点的稳定域，这种稳定域具有较大的保守性，通常是稳定域的子域，如通过对Lyapunov函数进行逐次迭代来得到稳定域的一部分以及通过构造最大Lyapunov函数方法[5]来得到稳定域等。最近，Chesi[6,7]提出了用一系列连续Lyapunov函数而不是一个Lyapunov函数来估计多项式微分系统的稳定域。拓扑动力系统方法主要是基于微分拓扑和动力系统的基本理论，在相空间对轨线的全局结构进行分析，进而给出稳定域的计算方法，Chiang, Hirsch和Wu[8]，Chiang和Thorp[9]，Lee和Chiang[10]以及Zaborszky, Huang, Zheng和Leung[11]等从拓扑动力学的观点出发对稳定域进行了深入研究，取得了显著的结果。计算稳定域还有其他方法，如能量函数方法、数值方法等。

波形松弛方法是微分方程数值解法，它将整个微分系统分成若干个子系统，各自独立进行仿真计算，子系统之间的耦合关系通过子系统中的一些波形信号的相互传递来实现，在系统之

收稿日期: 2008-03-07. **作者简介**: 蔺小林(1961年6月生)，男，教授. 研究方向：微分动力系统稳定域计算.

***基金项目**: 国家自然科学基金(10771168).

间联系相对较弱的情况下，比较容易得到收敛结果。

本文对微分动力系统的稳定域进行了综合分析，得到微分动力系统一个渐近稳定平衡点稳定域的边界是由闭轨线或由不稳定平衡点以及该不稳定平衡点的稳定或不稳定流形构成。基于这些结果给出了寻找稳定域边界流形的波形松弛数值算法，并用例子说明波形松弛方法在计算稳定域边界流形的有效性。

2 动力系统基本概念与波形松弛算法

对于非线性自治微分动力系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -f(x), \tag{2}$$

其中 $x \in M \subset \mathbb{R}^n$, $f: M \to M$，我们假设向量场 f 是连续函数并且对其变量具有一阶连续偏导数，以保证系统 (1) 和 (2) 解的存在唯一性，在相同时间变化情况下，系统 (1) 和 (2) 的轨线走向方向相反，因此称系统 (2) 为系统 (1) 的反方向系统。

方程

$$f(x) = 0 \tag{3}$$

的一个解称为系统 (1) 的一个平衡点，我们用集合 $E = \{x : f(x) = 0\}$ 来表示系统 (1) 的平衡点集合，E 中既有孤立点也可能含有连续可微闭轨线。

在局部坐标系下，如果在平衡点 x_e 处的雅可比矩阵 $J_{x_e}f$ 的特征值没有零实部，则称平衡点 x_e 为系统 (1) 的双曲平衡点。对一个双曲平衡点 x_e，可以把系统 (1) 在点 x_e 处的切空间 $T_{x_e}(M)$ 唯一地分解成两个子空间 E^s 和 E^u 的直和，即 $E^s \oplus E^u$，每个子空间在线性算子 $J_{x_e}f$ 下是不变的。对于 E^s 来说，$J_{x_e}f$ 的特征值具有负实部；对于 E^u 来说，$J_{x_e}f$ 的特征值具有正实部。记 E^s 的维数为 n_s，记 E^u 的维数为 n_u，子空间 E^s 和 E^u 可表示如下

$$\text{稳定的子空间} \quad E^s = \mathrm{span}\{v^1, v^2, \cdots, v^{n_s}\},$$

$$\text{不稳定的子空间} \quad E^u = \mathrm{span}\{w^1, w^2, \cdots, w^{n_u}\}.$$

这里 $v^1, v^2, \cdots, v^{n_s}$ 是 n_s 个 (正交化) 特征向量，它们的特征值具有负实部，而 $w^1, w^2, \cdots, w^{n_u}$ 是 n_u 个 (正交化) 特征向量，它们的特征值具有正实部，显然 $n_s + n_u = n$。

对系统 (1)，称平衡点 x_e 为 n_u 型。一个零型的平衡点称为**汇**，一个 n 型的平衡点称为**源**，其它型的平衡点称为**鞍点**，显然汇是渐近稳定的平衡点，源和鞍点是不稳定的平衡点。

设 $\hat{x}$ 是一个双曲平衡点，它的稳定流形 $W^s(\hat{x})$ 和不稳定流形 $W^u(\hat{x})$ 定义如下

$$W^s(\hat{x}) = \{x \in M : \Phi_t(x) \to \hat{x}, \ \text{当} \ t \to +\infty\}, \tag{4}$$

$$W^u(\hat{x}) = \{x \in M : \Phi_t(x) \to \hat{x}, \ \text{当} \ t \to -\infty\}. \tag{5}$$

类似地，一个双曲型闭轨 γ 的稳定流形 $W^s(\gamma)$ 和不稳定流形 $W^u(\gamma)$ 定义如下

$$W^s(\gamma) = \{x \in M : \Phi_t(x) \to \gamma, \ \text{当} \ t \to +\infty\}, \tag{6}$$

$$W^u(\gamma) = \{x \in M : \Phi_t(x) \to \gamma, \ \text{当} \ t \to -\infty\}. \tag{7}$$

由于流 $\Phi_t(\cdot)$ 临界元素的稳定流形对应于 $\Phi_{-t}(\cdot)$ 临界元素的不稳定流形，通过这种性质可以把稳定流形的性质转换为不稳定流形的性质。对于一个集 $S\subset\mathbb{R}^n$，如果从 S 中出发的微分动力系统 (1) 的每一条轨线对任何时刻 t 始终属于 S，则称 S 为 (1) 的不变集。显然集合 $W^s(\cdot)$ 和 $W^u(\cdot)$ 都是 (1) 的不变集。

轨线的无穷远性质可以用它的 ω-极限集和 α-极限集来研究。如果存在 $\mathbb{R}$ 中的时间序列 $\{t_i\}$，当 $t_i\to+\infty$ 时，使得

$$y=\lim_{t_i\to\infty}\Phi_{t_i}(x),$$

则称 y 属于 x 的 ω-极限集 (记为 $\omega(x)$)。类似地，α-极限集 $\alpha(x)$ 由 $t_i\to-\infty$ 来定义。可以证明这些极限集是集合 M 的闭不变子集。例如，一个平衡点是它自己的 ω-极限集，轨线的 ω-极限集在它的稳定流形内，轨线的 α-极限集属于它的不稳定流形。一个闭轨 γ 既是 γ 上任何点的 ω-极限集，也是 γ 上任何点的 α-极限集。

横截性的概念是动力系统的基本概念，如果 A, B 是 M 中的单射浸入流形，且满足在每一点 $x\in A\cap B$处，A 和 B 的切空间张成 x 处 M 的切空间，即

$$T_x(A)+T_x(B)=T_x(M),\quad x\in A\cap B,$$

或 A, B 完全不相交，则称 A 和 B 满足横截性条件。

一个双曲平衡点 $\hat{x}$ 的重要特性之一就是它的稳定和不稳定流形在 $\hat{x}$ 处横截相交。横截相交的重要性是由于在向量场的扰动下它保持不变。

对系统 (1) 和 系统 (2) 作如下假设：

A1) 稳定边界上的所有平衡点是双曲型；

A2) 在稳定边界上所有平衡点的稳定和不稳定流形满足横截相交条件；

A3) 稳定边界上每条轨线当 $t\to\infty$ 时趋于平衡点之一。

考虑微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\tilde{f}(t,x),\\[2mm] x(t_0)=x_0,\quad t\in[t_0,T],\end{cases}\tag{8}$$

其中 $\tilde{f}:[t_0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$，假设 $\tilde{f}$ 满足解的存在唯一性条件。

微分动力系统 (8) 一般的波形松弛迭代格式为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x^{(k+1)}(t)}{\mathrm{d}t}=F\big(t,x^{(k+1)}(t),x^{(k)}(t)\big),\\[2mm] x^{(k+1)}(t_0)=x_0,\quad t\in[t_0,T],\end{cases}\tag{9}$$

此处函数 F 满足

$$F:[t_0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\quad F(t,x,x)=\tilde{f}(t,x).$$

用波形松弛方法来计算微分动力系统初值问题已有许多较好的结论，Jiang[12,13] 和 Gander, Ruehli[14] 等用波形松弛方法研究了微分动力系统初值问题，给出了迭代格式收敛的充分性条件，用波形松弛方法、单调波形松弛方法和 Krylov 子空间波形松弛方法等对微分动力系统初值问题以及周期边值问题进行了研究，得到了迭代序列收敛及单调收敛的充分性条件，这些充分性条件保证本文用波形松弛方法计算微分动力系统一个渐近稳定平衡点稳定域边界流形算法的收敛性。

3 确定稳定域边界流形的波形松弛算法

根据渐近稳定平衡点稳定域边界流形的结构特征，在假设条件 A1) 到 A3) 成立情况下，有如下计算稳定域边界的波形松弛算法。

算法 确定渐近稳定平衡点 x_s 的稳定域边界 $\partial A(x_s)$。

第 1 步：找出系统 (1) 的所有平衡点，确定渐近稳定平衡点 x_s 稳定域边界上的平衡点；

第 2 步：用系统 (2) 确定系统 (1) 渐近稳定平衡点 x_s 稳定域边界上这些平衡点的稳定流形；

第 3 步：渐近稳定平衡点 x_s 稳定域的边界是由第 2 步确定的平衡点和该平衡点稳定流形的并集构成。

算法中第 1 步包括找出 $f(x) = 0$ 的所有解。第 2 步可以用波形松弛方法来完成，过程如下：

首先，确定系统 (1) 渐近稳定平衡点 x_s 稳定域边界上的平衡点。

i) 找出系统 (1) 的所有平衡点,零型平衡点记为 x_s，否则记为 $\hat{x}_i$，并求出系统 (1) 在平衡点 $\hat{x}_i$ 处的雅可比矩阵；

ii) 找出雅可比矩阵具有正实部特征值且具有单位长度的不稳定特征向量，记为 y_i；

iii) 找出这些具有单位长度的不稳定特征向量 y_i 和平衡点 $\hat{x}_i$ 的 ε-球边界的每一个交截 (交截点是 $\hat{x}_i + \varepsilon y_i$ 和 $\hat{x}_i - \varepsilon y_i$)；

iv) 从每个交截点开始对系统 (2) 用波形松弛方法计算积分轨线到某一步，如果轨线保留在这个 ε-球内，则进行下一步；否则，用 $\alpha\varepsilon$ 代替 ε，相应的交截点为 $\hat{x}_i \pm \alpha\varepsilon y_i$，此处 $0 < \alpha < 1$，重复这一步；

v) 从这些交截点开始用波形松弛方法计算积分轨线；

vi) 重复 iii) 到 v) 步。如果任何轨线趋于 x_s，则平衡点在稳定域边界上。

其次，确定系统 (1) 渐近稳定平衡点 x_s 稳定域边界上平衡点的稳定流形。

对平面系统，稳定域边界上平衡点的类型是一个鞍点或两个源。在这种情型下，1-型平衡点的稳定流形是一维，它可以用波形松弛方法确定如下：

a) 找出在平衡点 $\hat{x}$ 处雅可比矩阵单位长度的稳定特征向量 y；

b) 找出这个单位长度的稳定特征向量 y 与平衡点 $\hat{x}$ 的 ε-球边界的交截 (交截点为 $\hat{x} + \varepsilon y$ 和 $\hat{x} - \varepsilon y$)；

c) 从这些交截点开始对系统 (2) 用波形松弛方法计算向量场的积分轨线到某一步。如果轨线保留在这个 ε-球内，则进行下一步；相反，我们用 $\alpha\varepsilon$ 代替 ε，相应的交截点为 $\hat{x} \pm \alpha\varepsilon y$，此处 $0 < \alpha < 1$，重复这一步；

d) 从这些交截点开始对系统 (2) 用波形松弛方法计算积分轨线；

e) 所得轨线是系统 (2) 平衡点的不稳定流形。

对高维系统，计算过程类似于上述过程，计算结果能提供渐近稳定平衡点稳定域边界的稳定流形轨线集。

注 如果系统 (1) 只有一个渐近稳定平衡点，则在该平衡点较远处取几个点，从这些点处开始用波形松弛方法计算积分轨线，可以得到渐近稳定平衡点稳定域边界。

4 数值算例

例 1 考虑如下系统[8]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -2x_1 + x_1x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_2 + x_1x_2, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 2x_1 - x_1x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_2 - x_1x_2, \end{cases} \tag{11}$$

容易得到系统 (10) 的两个平衡点 $(0,0)$ 和 $(1,2)$，其中 $(0,0)$ 是渐近稳定平衡点，而 $(1,2)$ 是1-型平衡点，其部分不稳定流形收敛到平衡点 $(0,0)$。对系统 (11) 在点 $(1,2)$ 处，由于

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2-x_2 & -x_1 \\ -x_2 & 1-x_1 \end{pmatrix}\bigg|_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

特征值 $\lambda_1 = \sqrt{2}$ 所对应的单位特征向量为 $\alpha_1 = (-1/3, \sqrt{2}/3)^T$，特征值 $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ 所对应的单位特征向量为 $\alpha_2 = (1/3, \sqrt{2}/3)^T$，取 $\varepsilon = 0.1$，则在点

$$\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = (0.966667, 2.047133) \quad \text{和} \quad \left(\tilde{x}_1^{(0)}, \tilde{x}_2^{(0)}\right) = (1.033333, 1.952867)$$

处用波形松弛方法对系统 (11) 进行求解，其雅可比迭代格式为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1^{(k+1)}}{\mathrm{d}t} = 2x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}x_2^{(k)}, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2^{(k+1)}}{\mathrm{d}t} = x_2^{(k+1)} - x_1^{(k)}x_2^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

画出轨线图如图1所示，其中虚线为用波形松弛方法计算出的系统 (10) 渐近稳定平衡点 $(0,0)$ 的稳定域边界流形，所得稳定域与系统实际稳定域相同。

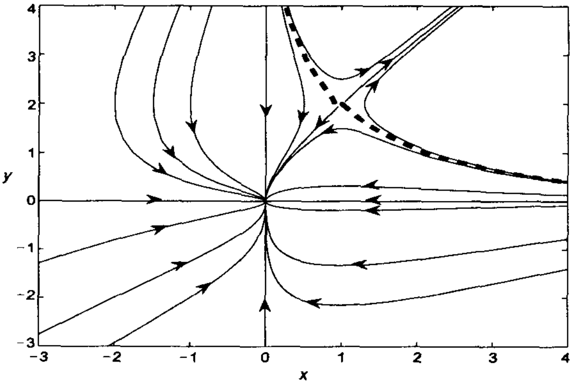

图 1: 系统 (10) 渐近稳定平衡点 $(0,0)$ 的稳定域

例 2 考虑如下系统[3,8]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -x_1 + x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 0.1x_1 - 2.0x_2 - x_1^2 - 0.1x_1^3, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1 - x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -0.1x_1 + 2.0x_2 + x_1^2 + 0.1x_1^3. \end{cases} \tag{13}$$

系统有三个平衡点：(0,0) 是系统 (12) 的局部渐近稳定平衡点，(-2.55,-2.55) 是系统 (12) 的 1-型平衡点，(-7.45,-7.45) 是系统 (12) 的局部渐近稳定平衡点。对于系统 (13) 在点 (-2.55,-2.55) 处，由于

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(-2.55,-2.55)} = \left.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0.1 + 2x_1 + 0.3x_1^2 & 2.0 \end{pmatrix}\right|_{(-2.55,-2.55)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3.24925 & 2 \end{pmatrix},$$

特征值 $\lambda_1 = 3.370628$ 所对应的特征向量为 $\alpha_1 = (1, -2.370628)^T$，特征值 $\lambda_2 = -0.370628$ 所对应的特征向量为 $\alpha_2 = (1, 0.629372)^T$，取 $\varepsilon = 0.1$，则在点

$$\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = (-2.450000, -2.823063) \quad 和 \quad \left(\tilde{x}_1^{(0)}, \tilde{x}_2^{(0)}\right) = (-2.650000, -2.312937)$$

处用波形松弛方法对系统 (13) 进行求解，其雅可比迭代格式为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1^{(k+1)}}{\mathrm{d}t} = x_1^{(k+1)} - x_2^{(k)}, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2^{(k+1)}}{\mathrm{d}t} = -0.1x_1^{(k+1)} + 2.0x_2^{(k+1)} + \left(x_1^{(k)}\right)^2 + 0.1\left(x_1^{(k)}\right)^3, \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

画出轨线图如图2所示，其中虚线为用波形松弛方法计算出的系统 (12) 渐近稳定平衡点的 (0,0) 和 (-7.45,-7.45) 的稳定域边界流形，所得稳定域与系统实际稳定域相同。

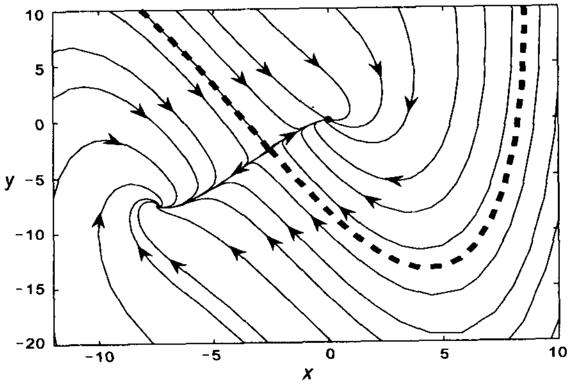

图 2: 系统 (12) 渐近稳定平衡点 (0,0) 和 (-7.45,-7.45) 的稳定域

例 3 考虑 Van der pol 振子方程[3]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_1 + \lambda(x_1^2 - 1)x_2, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 - \lambda(x_1^2 - 1)x_2. \end{cases} \tag{15}$$

系统仅有一个平衡点 $(0,0)$，取参数 $\lambda=1$，在 $(0,0)$ 较远处取一点 $(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$，比如 (-1.8, 0.3)，从此点开始对系统 (15) 用波形松弛方法求解，其雅可比迭代格式为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1^{(k+1)}}{\mathrm{d}t}=x_2^{(k)}, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2^{(k+1)}}{\mathrm{d}t}=-x_1^{(k)}+x_2^{(k+1)}-\left(x_1^{(k)}\right)^2x_2^{(k)}, \quad k=0,1,2,\cdots. \end{cases}$$

画出轨线图，可得系统 (14) 平衡点 $(0,0)$ 的稳定域，并且可得系统 (14) 存在不稳定极限环，其中虚线为用波形松弛方法计算出的系统 (14) 渐近稳定平衡点 $(0,0)$ 的稳定域边界流形，所得稳定域与系统实际稳定域相同，如图 3 所示。

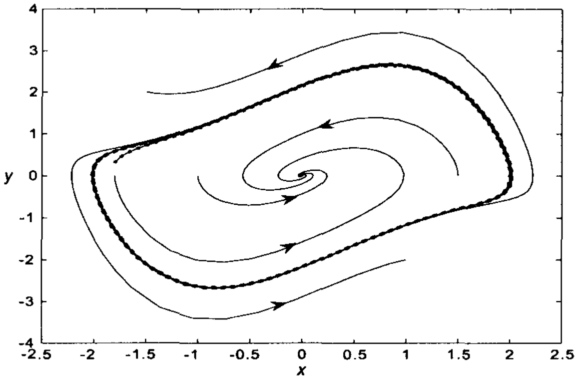

图 3: $\lambda=1$ 时系统 (14) 渐近稳定平衡点 $(0,0)$ 的稳定域

5 小结

我们用波形松弛方法计算了微分动力系统渐近稳定平衡点稳定域的边界流形，得到了渐近稳定平衡点的稳定域，由于已经得到微分代数系统多指标[15,16,18] 以及泛函微分方程[17] 波形松弛算法的收敛性结论，我们可以尝试用波形松弛方法计算微分代数系统 (含多指标) 以及泛函微分方程的稳定域或者收敛域问题。

参考文献：

[1] Praprost K L, Loparo K A. A stability theory for constrained dynamic systems with applications to electric power systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(11): 1605-1617

[2] Ratledge C, Kristiansen B. Basic Biotechnology[M]. New York: Cambridge, 2001

[3] Genesio R, Tartaglia M, Vicino A. On the estimation of asymptotic stability regions: state of the art and new proposals[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1985, ac-3(8): 747-755

[4] Varaiya P, Wu F F, Chen R L. Direct method for transient stability analysis of power systems: recent results[J]. Proceedings of the IEEE, 1985, 73: 1703-1715

[5] Vannelli A, Vidyasagar M. Maximal Lyapunov functions and domains of attraction for autonomous non-linear systems[J]. Automatica, 1985, 21: 69-80

[6] Chesi G. Estimating the domain of attraction for uncertain polynomial systems[J]. Automatica, 2004, 40: 1981-1986

[7] Chesi G. Estimating the domain of attraction via union of continuous families of Lyapunov estimates[J]. Systems Control Letters, 2007, 56: 326-333

[8] Chiang H D, Hirsch M, Wu F F. Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1988, 33: 16-27
[9] Chiang H D, Thorp J S. Stability regions of nonlinear dynamical systems: a constructive methodology[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, ac-34: 1229-1241
[10] Lee J, Chiang H D. Theory of stability region for a class of no hyperbolic dynamical systems and its application to constraint satisfaction problems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(2): 196-209
[11] Zaborszky J, Huang G, Zheng B, *et al.* On the phase portrait of a class of large nonlinear dynamic systems such as the power system[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1988, 33: 4-15
[12] Jiang Y L, Chen R M M, Wang O. Waveform relaxation of nonlinear second-order differential equations[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2001, 48(11): 1344-1347
[13] Jiang Y L. Periodic waveform relaxation solutions of nonlinear dynamic equations[J]. IEEE Applied Mathematics and Computation, 2003, 135(2-3): 219-226
[14] Gander M, Ruehli A E. Optimized waveform relaxation methods for RC type circuits[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2004, 51(4): 755-768
[15] 李宝成，蒋耀林. 关于动力学系统伪谱与扰动系统谱之间关系的研究[J]. 工程数学学报，2004, 21(6): 936-940
Li B C, Jiang Y L. A research on relationships for pseudospectra of dynamical systems and spectra of its perturbed systems[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2004, 21(6): 936-940
[16] 孙卫，樊晓光，李立. 关于微分-代数系统Runge-Kutta迭代方法的研究[J]. 工程数学学报，2005, 22(6): 1070-1075
Sun W, Fan X G, Li L. Research on iterative Runge-Kutta methods for DAEs[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(6): 1070-1075
[17] 王宇莹，赵炜，王峰. 一类泛函微分代数系统的波形松弛方法[J]. 工程数学学报，2006, 23(1): 71-79
Wang Y Y, Zhao W, Wang F. The waveform relaxation method for functional differential-algebraic equations[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(1): 71-79
[18] 孙卫，邹建华，王彤. 非线性指标-3微分-代数系统波形松弛算法的实现[J]. 工程数学学报，2007, 24(3): 539-542
Sun W, Zou J H, Wang T. Implementing waveform relaxation method for nonliear differential-algebraic systems of index-3[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(3): 539-542

The Waveform Relaxation Method for Estimating the Asymptotic Stability Region of Nonlinear Differential Dynamic Systems

LIN Xiao-lin

(School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: Estimating the asymptotic stability region of nonlinear differential dynamic systems is a problem applied in many fields. The paper outlines the computing methods for estimating the asymptotic stability region of nonlinear differential dynamic systems. By analyzing the boundary manifolds of the asymptotic stability region, we present the idea of calculating the boundary manifolds of asymptotic stability region with the waveform relaxation method and offer the algorithms. Firstly, find out all equilibrium points and determine which equilibrium point states in the boundary of asymptotic stability region of the stable equilibrium point. Secondly, use the negative system of nonlinear differential dynamic systems to fix stable manifolds of equilibrium point setting in the boundary. Thirdly, the boundary of the asymptotic stability region of stable equilibrium point is composed of stable equilibrium points and their stable manifolds. Numerical examples further illustrate the correctness of the theoretical results in this paper.

Keywords: *nonlinear differential dynamic systems; region of asymptotic stability; waveform relaxation* method

Received: 07 Mar 2008. **Accepted:** 07 May 2008.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10771168).